

改进的基于特征线理论的流体力学有限元法

韩向科¹, 钱若军¹, 袁行飞², 林智斌³

(1. 同济大学建筑工程系, 200092, 上海; 2. 浙江大学建筑工程学院, 310027, 杭州;
3. 威斯康星大学土木工程与力学系, 53211, 美国威斯康星州密尔沃基市)

摘要: 通过沿特征线求解动量方程, 并运用局部泰勒级数展开对方程的离散进行简化, 在传统的基于特征线离散的分裂算法的基础上, 推导了一种精确的显式离散方法, 详细给出了基于局部泰勒级数展开的特征线离散过程, 并推导了有限元控制方程. 通过自主研发的空间结构自动分析设计系统 (简称 AADS) 流体模块中的三维算例计算, 表明文中的分析是正确的, 提出的改进方法具有较高的计算精度.

关键词: 有限元法; 特征线法; 流体力学; 分裂算法; 显式格式

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)07-0112-06

Improved Characteristic-Based Split Finite Element Method for Fluid Dynamics

HAN Xiangke¹, QIAN Ruojun¹, YUAN Xingfei², LIN Zhibin³

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 3. Department of Civil Engineering and Mechanics, University of Wisconsin, Milwaukee, WI 53211, USA)

Abstract: With extensive finite element analysis and characteristics of fluid flow studies, an exact explicit discrete method for characteristics via local Taylor expansion was developed. Momentum equation along the characteristics was formulated and the FEM governing equations of the split method were derived. The proposed method had been achieved using in-house software package AADS (Automatic Analysis and Design of Space structure) and was verified using numerical examples documented in the literature. Comparison with numerical examples indicates that the proposed exact explicit discrete method can accurately predict incompressible fluid flow.

Keywords: finite element method; method of characteristics; fluid dynamics; split algorithm; explicit calculation

利用有限元法求解对流扩散方程时, 当雷诺数增加到一定值就会引起数值振荡, 最终导致求解失败. 为了获得稳定的数值求解, 通常采用基于迎风有限元的方法, 通过适当地修正标准 Galerkin 方法中的权函数来获得所谓的人工耗散项, 进而得到稳定的数值解, 例如 Petrov-Galerkin 法、SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin) 法、GLS (Galerkin

least squares) 法等. 然而, 由于基于迎风有限元方法中的最优参数不易确定, 同时大多数方法是建立在对稳态问题分析的基础上的, 因此这类方法并不适合瞬态问题的求解^[1]. 对于瞬态问题, 通常采用的稳定方法有 Characteristic-Galerkin 法、Taylor-Galerkin 法等, 这些方法虽然是建立在瞬态问题分析的基础上的, 然而可以通过时间步方法, 利用迭代方式

实现稳态问题的求解,其中,由 Zienkiewicz 等^[2-7]于 20 世纪 90 年代初发展的特征分裂(characteristic-based split,CBS)算法具有良好的性能.该方法以特征线理论为基础,运用分裂算法求解控制方程,具有明确的数学依据,可以运用标准的 Galerkin 有限元法获得稳定的数值解.

CBS 算法最具吸引力的地方之一是采用了基于局部泰勒级数展开的特征线离散方法,这种方法不但可以导出合理的稳定项,并且可以得到计算简便的显式格式,从而可以获得稳定的数值解. Zienkiewicz 等^[6-7]对这种局部泰勒级数展开的特征线离散方法进行了详尽的讨论,并给出了三阶的近似计算公式,然而为了获得完全显式的计算格式,却做了一定的近似处理,导致精度降低.本文通过对特征线方法的研究,在不损失精度的情况下导出了完全显式的计算格式,并以三维不可压流动问题为例进行了验证,证明在同样的计算条件下,本文提出的改进格式具有较高的计算精度.

1 特征线法概述

特征线法是以偏微分方程的特征理论为基础,求解双曲线型偏微分方程的一种解法,具有明确的物理和数学意义.沿特征线可以把偏微分方程转化为全微分方程,简化原有方程的求解.特征线法在求解偏微分方程中有着广泛的应用.

1.1 特征线概念

考虑一阶拟线性双曲方程

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式中: $\phi(\mathbf{x}, t)$ 为因变量; $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ 为系数.

式(1)的特征线定义为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x}, \tau; t) = \mathbf{C}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; t)) \quad (2)$$

且有条件

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; \tau) = \mathbf{x} \quad (3)$$

式中: τ 为参考时间.将式(1)沿特征线变换后有

$$\frac{d\phi(\mathbf{X}, t)}{dt} = 0 \quad (4)$$

由式(4)可以看出,沿着特征线 $\mathbf{X}$ 可以将偏微分方程(1)转化为一个全微分方程,并且方程(4)只有在由式(2)所决定的特征线上才是成立的.

1.2 沿特征线离散的方法

由于特征曲线随时间变化,当采用数值方法求

解时,就意味着需要不断地更新坐标,这无疑给计算带来了一定的困难,在大规模流体问题的计算中是不可取的,并且在有些情况下会引起网格纠缠,使得计算失败.通常采用的是 Eulerian-Lagrangian 法,该方法结合了 Eulerian 描述和 Lagrangian 描述的优点,计算时保持 Eulerian 网格不变,而将变化的流体质点沿着特征线假想地后推(或前推)以形成 Lagrangian 网格,然后将流场变量信息由 Eulerian 网格投影到 Lagrangian 网格即可^[8-9].这种方法的关键是变量信息的投影计算,通常需要配合精确的节点搜寻算法.由 Löhner 等^[10]提出的基于局部泰勒级数展开的简化方法不但可以避免网格之间的投影计算,而且可以得到显式格式,因此得到了广泛的应用.

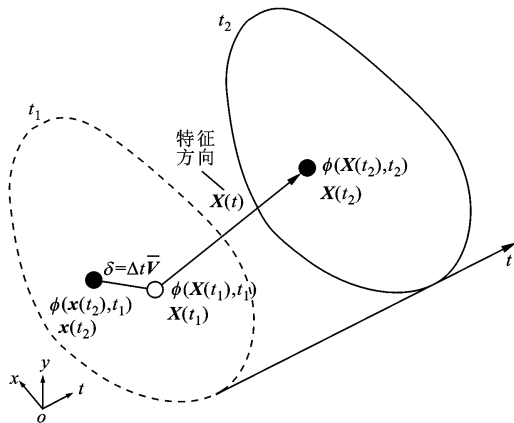


图 1 基于局部泰勒级数展开的特征线方法描述

以二维标量对流问题为例,如图 1 所示,其特征线为 $\mathbf{X}(t)$.设在时刻 t_1 任意一点从 $\mathbf{X}(t_1)$ 经过时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 沿 $\mathbf{x}$ 方向移动距离 $\delta = \Delta t \bar{\mathbf{V}}$ 后,在时刻 t_2 到达 $\mathbf{X}(t_2)$,其中 $\bar{\mathbf{V}}$ 表示从 $\mathbf{X}(t_1)$ 到 $\mathbf{X}(t_2)$ 的平均速度. $\phi(\mathbf{X}(t_1), t_1)$ 为在时刻 t_1 、 $\mathbf{X}(t_1)$ 处的已知变量, $\phi(\mathbf{X}(t_2), t_2)$ 为在时刻 t_2 、 $\mathbf{X}(t_2)$ 处的待求未知变量.为了获得 $\phi(\mathbf{X}(t_2), t_2)$,对式(4)进行一阶时间差分

$$\frac{1}{\Delta t} [\phi(\mathbf{X}(t_2), t_2) - \phi(\mathbf{X}(t_1), t_1)] = 0 \quad (5)$$

显然, $\mathbf{X}(t_1)$ 和 $\mathbf{X}(t_2)$ 不在同一空间位置,因而需要通过网格更新追踪质点进行计算.如果将变量 $\phi(\mathbf{X}(t_1), t_1)$ 在 $\phi(\mathbf{x}(t_2), t_1)$ 处进行泰勒级数展开

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{X}(t_1), t_1) &= \phi(\mathbf{x}(t_2) - \delta, t_1) \approx \\ &\phi(\mathbf{x}(t_2), t_1) - \delta \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}(t_2), t_1) + \\ &\frac{1}{2!} \delta^2 \cdot \nabla \nabla \phi(\mathbf{x}(t_2), t_1) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (6)$$

则可避免网格更新带来的困难.要使得式(6)具有三

阶近似精度,则 δ 必须至少为三阶近似精度,文献[7]给出的表达式为

$$\begin{aligned} \delta = \Delta \bar{V} = \Delta t \frac{1}{2} (\mathbf{V}(\mathbf{X}(t_1), t_1) + \mathbf{V}(\mathbf{X}(t_2), t_2)) = \\ \Delta t \left({}^{t_1+\frac{\Delta t}{2}}\mathbf{V} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1) \cdot \right. \\ \left. \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1) + O(\Delta t^2) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$${}^{t_1+\frac{\Delta t}{2}}\mathbf{V} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1) + \mathbf{V}(\mathbf{X}(t_2), t_2)) \quad (8)$$

值得注意的是,从理论上讲,式(7)具有较高的计算精度,然而为了获得完全显式的计算格式,文献[7]近似采用了 ${}^{t_1+\frac{\Delta t}{2}}\mathbf{V} = {}^{t_1}\mathbf{V} + O(\Delta t)$,显然只有当时时间步足够小时,这种近似关系才能成立,反之则会带来一定误差。为了获得较为精确的 δ ,并得到完全的显式格式,这里将 ${}^{t_1+\frac{\Delta t}{2}}\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1)$ 处利用泰勒级数展开

$${}^{t_1+\frac{\Delta t}{2}}\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_2), t_1)}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

将式(9)、式(7)和式(6)代入式(5),并略去高阶项,最后可得

$$\begin{aligned} \frac{{}^{t_2}\phi - {}^{t_1}\phi}{\Delta t} = - {}^{t_1}\mathbf{V} \cdot \nabla {}^{t_1}\phi + \\ \frac{\Delta t}{2} \left({}^{t_1}\mathbf{V} \cdot \nabla ({}^{t_1}\mathbf{V} \cdot \nabla {}^{t_1}\phi) - \frac{\partial {}^{t_1}\mathbf{V}}{\partial t} \cdot \nabla {}^{t_1}\phi \right) \end{aligned} \quad (10)$$

可以看出,式(10)中右端全部为时刻 t_1 的已知变量,即为完全显式格式。与传统的 CBS 中沿特征线离散的方法相比,式(10)中的 $\frac{\partial {}^{t_1}\mathbf{V}}{\partial t} \cdot \nabla {}^{t_1}\phi$ 即为考虑时间高阶项影响的附加稳定项。

2 黏性不可压流体 CBS 算法的导出

以黏性不可压流体为例,其基本方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\rho}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}_\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p - \rho \mathbf{g} \quad (12)$$

式中: t 表示时间; $\mathbf{V}_\rho = \rho \mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{V}$ 为流体的速度, ρ 为密度; p 为压强; $\boldsymbol{\tau}$ 为流体的偏应力张量; $\mathbf{g}$ 为重力加速度。

2.1 基于特征线的投影法

按照式(10)将式(12)沿特征线离散,不难导出

$$\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_\rho - {}^t\mathbf{V}_\rho}{\Delta t} =$$

$$\begin{aligned} - {}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V}_\rho + \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} - \nabla {}^{t+\theta_2\Delta t}p - {}^t\rho {}^t\mathbf{g} + \\ \frac{\Delta t}{2} {}^t\mathbf{V} \cdot \nabla [{}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V}_\rho - \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} + \nabla {}^t p + {}^t\rho {}^t\mathbf{g}] + \\ \frac{\Delta t}{2} \left({}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla {}^t p + {}^t\mathbf{g} \right) \cdot \nabla {}^t\phi \end{aligned} \quad (13)$$

可以看出,式(13)中对流项消失了。联立式(13)与式(11),利用 SG 有限元法即可获得问题的稳定解。

从求解的过程来看,原始变量形式的不可压 N-S 方程的有限元解法可以大致分为解耦迭代解法与耦合直接解法 2 类。国外一些学者^[11-13]认为,解耦迭代解法具有较高的计算效率,其中解耦迭代解法中的投影法具有明确的数学物理意义,通常可以获得良好的压力稳定性,有着较为广泛的应用。投影法最初由 Chorin 和 Temam^[14-16]在计算不可压流动的有限差分法中提出,之后由 Comini 等^[17]和 Donea 等^[11]引入有限元的计算中。该算法解耦动量方程和连续方程,分步求解速度和压力变量。采用投影法首先建立方程求解次迭代中的辅助动量方程

$$\begin{aligned} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_\rho^{\text{int}} - {}^t\mathbf{V}_\rho}{\Delta t} = - {}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V}_\rho + \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} - {}^t\rho {}^t\mathbf{g} + \\ \frac{\Delta t}{2} {}^t\mathbf{V} \cdot \nabla [{}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V}_\rho - \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} + {}^t\rho {}^t\mathbf{g}] + \\ \frac{\Delta t}{2} \left({}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t\mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} + {}^t\mathbf{g} \right) \cdot \nabla {}^t\mathbf{V} \end{aligned} \quad (14)$$

式中: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_\rho^{\text{int}}$ 为辅助速度。获得辅助速度后,由下式更新压力场

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_\rho^{\text{int}} - \Delta t \nabla \cdot \left(\nabla {}^{t+\Delta t}p - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V} \cdot \nabla {}^t p \right) = 0 \quad (15)$$

最后由压力场修正速度场

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{V}_\rho - {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{V}_\rho^{\text{int}} = - \Delta t \nabla {}^{t+\theta_2\Delta t}p + \\ \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\mathbf{V} \cdot \nabla {}^t p + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} \nabla {}^t p \cdot \nabla {}^t\mathbf{V} \end{aligned} \quad (16)$$

2.2 有限元格式的导出

对式(14)~(16)采用 SG 方法进行空间离散,可得有限元方程

$$\mathbf{M}_V {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{\rho c}^{\text{int}} = \mathbf{M}_V {}^t\mathbf{V}_{\rho c} - \Delta t {}^t\mathbf{R}_V \quad (17)$$

$$\Delta t \mathbf{L} {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_c = {}^t\mathbf{R}_p \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{\rho c} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{\rho c}^{\text{int}} - \Delta t {}^t\mathbf{R}_c \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_V = {}^t\mathbf{C}_V {}^t\mathbf{V}_{\rho c} + \mathbf{K}_\tau {}^t\mathbf{V}_e - {}^t\mathbf{F}_f - \\ \Delta t ({}^t\mathbf{K}_s {}^t\mathbf{V}_{\rho c} + {}^t\mathbf{F}_{\text{sg}}) + {}^t\mathbf{K}_{\text{st}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{R}_p = \mathbf{K}_{Vp}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{\rho c}^{\text{int}} - \\ \Delta t \int_\Gamma \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}^T (\nabla {}^{t+\Delta t}p - \rho {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{\text{int}}) d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{M}_V^{-1} \left(\mathbf{K}_{Vp} {}^{t+\Delta} \mathbf{P}_e - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_p {}^t \mathbf{P}_e + \mathbf{K}_p {}^t \mathbf{P}_e \right)$$

(22)

其中 $\mathbf{M}_V = \int_V \mathbf{N}_V^T \mathbf{N}_V dV$, ${}^t \mathbf{C}_V = \int_V \mathbf{N}_V^T \nabla^T ({}^t \mathbf{V} \mathbf{N}_V) dV$, 其余从略.

通过依次计算式(17)~(19),最终可以获得问题的收敛解.这里采用收敛标准

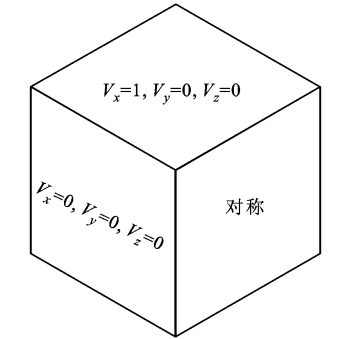
$$R = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (\| {}^{t+\Delta} \mathbf{V}_i \| - \| {}^t \mathbf{V}_i \|)^2 \right]^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^N \| {}^{t+\Delta} \mathbf{V}_i \|^2 \right]^{1/2}} \leq 10^{-6}$$

(23)

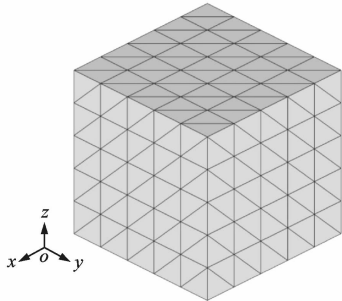
式中: N 为节点总数.

3 数值算例

以文献[18]中的空腔流动作为数值算例,如图 2a 所示,流场的长、宽、高均为 1,采用 10 节点 Tet 单元、拉格朗日二次速度和压力插值函数.速度边界条件为:顶面 $V_x=1, V_y=0, V_z=0$;左、右面及底面为无滑移壁面;前、后面为滑移壁面.压强边界条件为:底面中点设为压力零点.算例的有限元网格划分见图 2b,采用结构网格划分,分别取网格 1 为 $8 \times 8 \times 8$,网格 2 为 $12 \times 12 \times 12$.



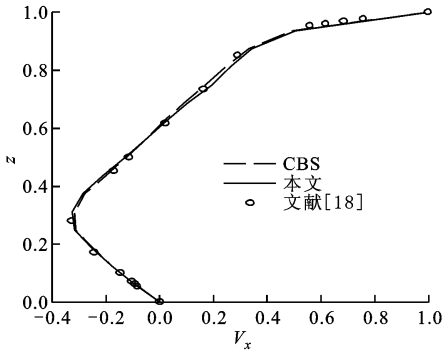
(a)空腔流动几何及边界条件示意图



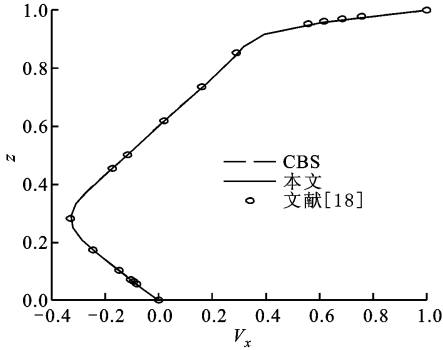
(b)空腔流动有限元划分示意图

图 2 空腔流动有限元模型及边界条件示意图

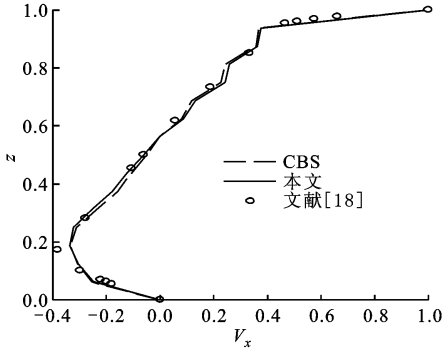
在自主研发的空间结构自动分析设计系统(简称 AADS)的流体模块中,求解雷诺数为 400 和 1 000 时的空腔流动.图 3 为水平速度 V_x 沿腔体竖向中线的分布,图 4 为腔体的水平中线压力分布.由图 3 可以看出,两种算法的速度分布比较接近,并且



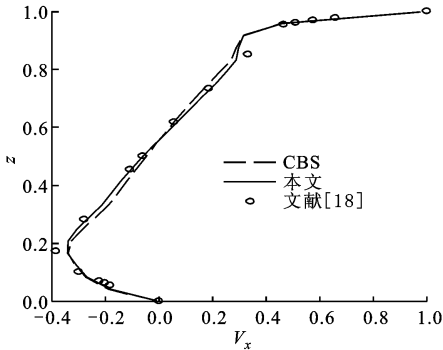
(a)网格 1, $Re=400$



(b)网格 2, $Re=400$

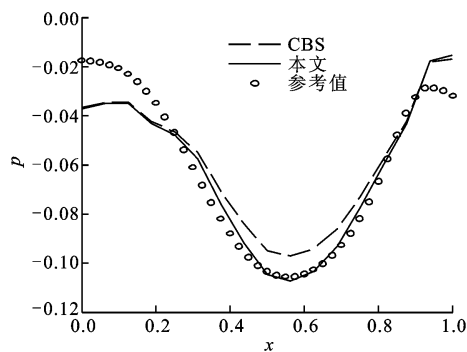
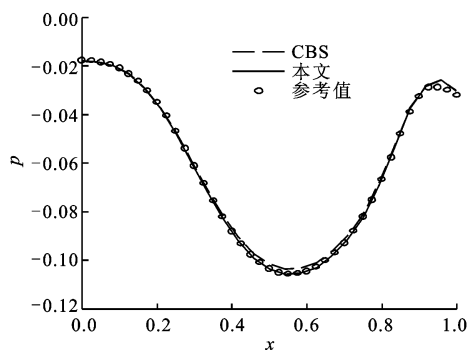
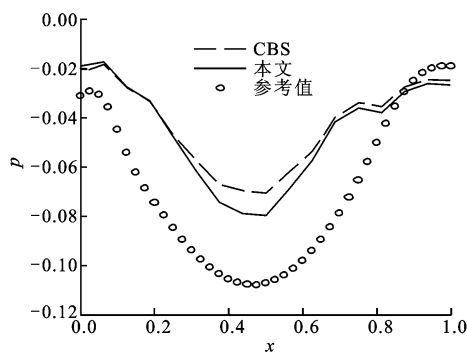
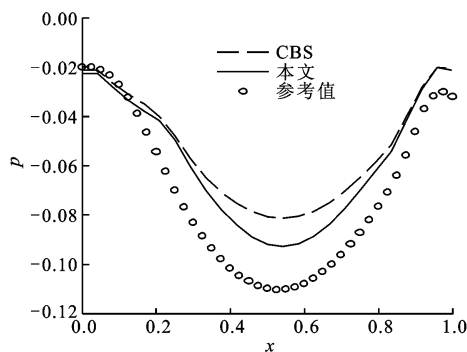


(c)网格 1, $Re=1\ 000$



(d)网格 2, $Re=1\ 000$

图 3 腔体流动沿垂直中线的水平速度 V_x 对比

(a) 网格 1, $Re=400$ (b) 网格 2, $Re=400$ (c) 网格 1, $Re=1\ 000$ (d) 网格 2, $Re=1\ 000$

参考值: $20 \times 20 \times 20$ 网格的计算结果

图4 腔体流动沿水平中线的压力对比

随着网格密度的增加差异逐渐减小,但在网格密度较稀疏或雷诺数较大时,即对应单元的 Plect 数较大时,两种算法的结果表现出轻微的差异.本文算法得出的结果与文献[18]的结果较为接近.由图4可以看出,在空腔两端两种算法的结果较为接近,但在中线附近差异逐渐增大,且随着雷诺数的增大差异也逐渐增加.显然,本文提出的算法所得到的结果与参考值吻合较好.

4 结 论

通过沿特征线求解动量方程,并运用局部泰勒级数展开对方程的离散进行简化,在传统 CBS 算法沿特征线离散的基础上,推导了一种精确的显式离散方法.通过对自主研发的 AADS 系统中流体模块的计算,表明本文的分析是正确的,在相同的求解条件下,本文提出的算法较传统的 CBS 算法有所改善,可以作为进一步研究及应用的基础.虽然 CBS 算法已经广泛应用于计算流体力学,但是应当指出,由于它采用了投影算法,涉及投影误差、压力数值边界层等方面的问题^[13],因而降低了求解精度.此外,当运用显式算法时,往往对于时间步有着严格的限制条件,尤其当网格密度较大时,使得计算量大幅增加.因此,如何完善 CBS 算法,作者正在做进一步的深入研究.

参考文献:

- [1] 王建军,陆明万,张雄. 流体力学 Petrov-Galerkin 有限元法研究进展[J]. 计算力学学报,1998, 115(4): 495-502.
- WANG Jianjun, LU Mingwan, ZHANG Xiong. Research progress in Petrov-Galerkin finite element methods for fluid mechanics: a review [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1998, 115(4): 495-502.
- [2] ZIENKIEWICZ O C, SZMELTER J, PERAIRE J. Compressible and incompressible flow; an algorithm for all seasons [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, 78: 105-121.
- [3] ZIENKIEWICZ O C, WU J. A general explicit or semi-explicit algorithm for compressible and incompressible flows [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35: 457-479.
- [4] ZIENKIEWICZ O C, ORTIZ P. A split characteristic based finite element model for shallow water equations [J]. Int J Num Meth Fluids, 1995, 20: 1061-1080.
- [5] ZIENKIEWICZ O C, CODINA R. Search for a general fluid mechanics algorithm [M]//Caughey D A, Hafez

- M M. *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*. New York, USA; Wiley, 1995; 101-113.
- [6] ZIENKIEWICZ O C, CODINA R. A general algorithm for compressible and incompressible flow; part I The split, characteristic-based scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 869-885.
- [7] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L, NITHIARASU P. *The finite element method for fluid dynamics* [M]. 6th ed. Amsterdam, The Netherlands; Elsevier, 2005; 56-58.
- [8] CELIA M. Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for contaminant transport simulations [M]// *Computational Methods in Water Resources*; X. Boston, USA; Kluwer Academic, 1994; 207-216.
- [9] KAAZEMPUR-MOFRAD M R, ETHIER C R. An efficient characteristic Galerkin scheme for the advection equation in 3-D [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 5345-5363.
- [10] LÖHNER R, MORGAN K, ZIENKIEWICZ O C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1984, 4: 1043-1063.
- [11] DONEA J, GIULIANI S, LAVAL H, et al. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1982, 30: 53-73.
- [12] RAMASWAMY B, JUE T C, AKIN J E. Semi-implicit and explicit finite element schemes for coupled fluid/thermal problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 34: 675-696.
- [13] GUERMONDA J L, MINEV P, SHEN Jie. An overview of projection methods for incompressible flows [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2006, 195: 6011-6045.
- [14] CHORIN A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations [J]. *Math Comput*, 1968, 22: 742-762.
- [15] CHORIN A J. On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations [J]. *Math Comput*, 1969, 23: 341-353.
- [16] TEMAM R. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires: II [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 1969, 33: 377-385.
- [17] COMINI G, DEL GUIDICE S. Finite element solution of incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Numer Heat Transfer: A*, 1972, 5: 463-478.
- [18] GHIA U, GHIA K N, SHIN C T. High- Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, 48: 387-411.

(编辑 葛赵青)